

(Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir.)

9. 1. Mantık

9. 1. 1. Önermeler ve Bileşik Önermeler

Terimler ve Kavramlar : Önerme, bileşik önerme, önermenin değili, her, bazı, ve, veya, ya da bağlaçları, De Morgan kuralları, koşullu önerme, iki yönlü koşullu önerme (veya gerek ve yeter şart), açık önerme.

Sembol ve Gösterimler : p , p' (veya $\sim p$) , \equiv , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow , $\underline{\forall}$, \exists , \forall

9. 1. 1. 1. Önermeyi, önermenin doğruluk değerini, iki önermenin denkliğini ve önermenin değilini açıklar.

9. 1. 1. 2. Bileşik önermeyi açıklar. “ ve, veya, ya da ” bağlaçları ile kurulan bileşik önermelerin özelliklerini ve De Morgan kurallarını doğruluk tablosu kullanarak gösterir.

1. ÜNİTE : MANTIK

Mantık doğru düşünme bilimidir. Doğru sonuca mantık kuralları ile ulaşılabilir. Matematiğin amaçlarından biri doğru ve sistemli düşünebilmeyi kazandırmaktır.

Önerme – Bileşik Önermeler

Tanım : (Önerme) Kesin olarak doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere “ önerme ” adı verilir. Önermeler çoğunlukla p , q , r , s v.b. harflerle gösterilir.

*** Bir önerme; **doğru hüküm** bildiriyorsa önermenin doğruluk değeri **1** , **yanlış hüküm** bildiriyorsa önermenin doğruluk değeri **0** olarak gösterilir.

(Bir p önermesinin doğruluk değeri; önerme doğru ise $p \equiv 1$, önerme yanlış ise $p \equiv 0$ olarak belirtilir.)

Örnek: Aşağıdaki ifadelerden hangileri önerme, hangileri önerme değildir ? Tabloda işaretleyip (X işareti koyunuz), önerme olanların doğruluk değerini tabloya yazınız.

İFADE	Önermedir	Önerme Değildir	Doğruluk Değeri
Türkiye'nin en büyük gölü Van Gölü'dür.			
Havalar soğumaya başladı.			
Rakamlar 9 tanedir.			
3 en küçük tek asal sayıdır.			
Tüm çift sayılar 4 ile tam bölünür.			
En sevilen ders matematik'tir.			

Soru : Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerinin toplamını bulunuz.

p : “ Negatif bir tam sayının tüm kuvvetleri yine negatiftir. ” ()

q : “ Tek basamaklı asal sayıların toplamı 17 'dir. ” ()

r : “ Reel sayılar kümesi en kapsamlı sayı kümesidir. ” ()

t : “ Sayıların sıfıra bölümü tanımsızdır. ” ()

Tanım: (Doğruluk Tablosu)

Önermelerin bütün doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya “ doğruluk tablosu ” adı verilir.

1) Bir p önermesinin doğruluk değeri ya 0 (yanlış) ya da 1 (doğru) olabilir.

p
1
0

2) İki p ve q önermesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p ve q önermeleri doğrudur →

p doğru ama q yanlış önermedir →

p yanlış ama q doğru önermedir →

Her ikisi de yanlış önermedir →

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

3) Herhangi üç p , q ve r önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.

p	q	r

Not : n tane farklı önermenin doğruluk değerleri için 2^n tane farklı durum vardır.

Tanım : Doğruluk değerleri aynı olan önermelere “ denk önermeler ” adı verilir.

p ve q denk önermeler ise bu durum $p \equiv q$ olarak gösterilir.

Soru : Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerlerini bulup, denk önermeleri belirleyiniz.

p : “ 54627062814 sayısı 3 ile tam bölünür. ”

q : “ İki basamaklı en büyük negatif tam sayı - 99 ’dur. ”

r : “ 0 en küçük sayma sayısıdır. ”

s : “ Eşkenar üçgende her bir iç köşe açısının ölçüsü 60° ’dir. ”

Tanım : Bir önermenin hükmünün değiştirilmesi sonucu ile elde edilen önermeye “ önermenin olumsuzu (değili) ” adı verilir. Bir p önermesinin değili p' ile gösterilir.

p	p'	$(p')'$
1	0	1
0	1	0

Tablodan da görüleceği üzere $(p')' \equiv p$ olur. Yani bir önermenin değilininin değili önermenin kendisine denk olur.

Soru : Aşağıdaki önermelerin doğruluk değerini bulup, değerleri tabloya yazınız.

p : “ $5 + 2 \cdot (-3) - (-2)^3 = 7$ 'dir. ”

q : “ En büyük rakamları farklı üç basamaklı çift sayının 6 fazlası 870 'tir. ”

p	p'	q	q'

Tanım : (Bileşik Önerme)

İki ya da daha fazla önermenin birbirine “ ve ” , “ veya ” , “ ya da ” , “ ise ” ve “ ancak ve ancak ” bağlaçları ile birbirine bağlanması ile elde edilen önermeye “ bileşik önerme ” adı verilir.

1) Ve Bağlacı (\wedge)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık **ve** bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf'a :

(Olay)

- Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır.
- Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır.
- Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır.
- Her ikisini de almamıştır.

(Sonuç)

İsteği gerçekleşir.
İsteği gerçekleşmez.
İsteği gerçekleşmez.
İsteği gerçekleşmez.

***** Ve (\wedge) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.**

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Not: Ve bağlacı ile bağlanmış önermelerin oluşturduğu bileşik önerme;
iki önerme de doğru iken doğru,
diğer durumlarda ise yanlıştır.

Soru: $(1 \wedge 0)' \wedge 0' \equiv ?$

Soru: p : “ $\sqrt{-25} = -5$ 'tir. ” ve q : “ En büyük negatif tam sayı -1 'dir. ” önermeleri için $p \wedge q' \equiv ?$

2) Veya Bağlacı (V)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık **veya** bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf'a :

- Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır. İsteği gerçekleşir.
- Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır. İsteği gerçekleşir.
- Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır. İsteği gerçekleşir.
- Her ikisini de almamıştır. İsteği gerçekleşmez.

p	q	p V q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*** Veya (V) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu yandaki gibidir. (Veya bağlacında hem tek önerme hem de iki önerme şartı sağlayabilir.)

Not : Veya bağlacı ile bağlanmış önermelerin oluşturduğu bileşik önerme; bileşenlerden biri bile doğru iken doğru, ikisi de yanlış iken yanlıştır.

Soru : $A) (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0)' \equiv ?$

$B) [1' \vee (0 \vee 1)] \wedge 1 \equiv ?$

Soru: $[(1 ' \vee 0) ' \wedge 1] \vee (1 \wedge 0) \equiv ?$

Soru: $p : " 6 < 7 - (- 3) "$ ve $q : " \text{Asal sayıların hepsi çift sayıdır.} "$ önermeleri için $p ' \vee q \equiv ?$

Soru: p : “ Tek sayıların çift kuvvetleri yine tek sayıdır. ” ,
 q : “ En küçük çift doğal sayı 2 'dir. ” ve r : “ $3x - 5 = 13$ ise
 $x = 6$ 'dır. ” önermeleri için $(r \wedge p)' \vee q \equiv ?$

Örnek: $p \wedge q' \equiv 1$ ve $r \vee q \equiv 1$ ise $(p \vee r)' \vee q \equiv ?$
(Verilen bileşik önermeler kullanılarak önermelerin doğruluk değerleri bulunur.)

$$p \wedge q' \equiv 1 \quad | \quad r \vee q \equiv 1 \quad | \quad (p \vee r)' \vee q \equiv ?$$

Soru: $(p \wedge q') \wedge (q \vee r) \equiv 1$ ise p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

$$(p \wedge q') \wedge (q \vee r) \equiv 1$$

Soru: $(r \vee q') \vee (p \wedge q)' \equiv 0$ ise p, q ve r önermelerinin doğruluk değerlerini bulup, $r' \wedge (p \vee q)$ bileşik önermesinin sonucunu elde ediniz.

$$(r \vee q') \vee (p \wedge q)' \equiv 0$$

Örnek: $(p \vee q) \wedge q'$ bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.

p	q	q'	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge q'$

Not: Bileşik önermelerde tabloya yerleşim yaparken; önce tekli önermeler, sonra ikili bileşke önermeleri, en son da üçlü bileşke önermeleri yerleştirilir.

Soru: $p \vee (q \wedge p')$ bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.

Soru: $(p \wedge r) \vee (q \wedge p)$ bileşik önermesinin doğruluk tablosunu oluşturunuz.

Ve İle Veya Bağlacı İle Bağlanan Bileşik Önermelerin Özellikleri

*****1) Tek Kuvvet Özelliği:** Her p önermesi için, $p \vee p \equiv p$ ve $p \wedge p \equiv p$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilir.

***2) Değişme Özelliği:** Her p ve q önerisi için, $p \vee q \equiv q \vee p$ ve $p \wedge q \equiv q \wedge p$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilir.

***3) Dağılma Özelliği:** Her p, q ve r önerisi için,
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ve
 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilir.

***4) Birleşme Özelliği:** Her p, q ve r önerisi için,
 $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ ve
 $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ denkliği sağlanır. Sağlama tablo ile de gösterilebilir.

***5) Özel Durumlar :

$p \vee 1 \equiv 1$ <p>↓ ↓</p> $1 \vee 1 \equiv 1$ $0 \vee 1 \equiv 1$	$p \vee 0 \equiv p$ <p>↓ ↓</p> $1 \vee 0 \equiv 1$ $0 \vee 0 \equiv 0$	$p \vee p' \equiv 1$ <p>↓ ↓</p> $1 \vee 0 \equiv 1$ $0 \vee 1 \equiv 1$
$p \wedge 1 \equiv p$ <p>↓ ↓</p> $1 \wedge 1 \equiv 1$ $0 \wedge 1 \equiv 0$	$p \wedge 0 \equiv 0$ <p>↓ ↓</p> $1 \wedge 0 \equiv 0$ $0 \wedge 0 \equiv 0$	$p \wedge p' \equiv 0$ <p>↓ ↓</p> $1 \wedge 0 \equiv 0$ $0 \wedge 1 \equiv 0$

Sonuçları deneme yanılma metodu ile de bulabilirsiniz.

Örnek: $p \wedge (q \wedge p') \equiv ?$

Soru: $(p \vee q) \vee q' \equiv ?$

Soru: $p \wedge (p' \vee q) \equiv ?$

Soru: $p \vee (p' \wedge q) \equiv ?$

*****6) De Morgan Özelliği :** Her p ve q önerisi için,

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ ve $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ denkliği sağlanır. Birinin sağlamasını aşağıdaki tabloda gösterelim.

p	q	p'	q'	p \vee q	(p \vee q)'	p' \wedge q'

Totoloji – Çelişki

Bir bileşik önerme; kendisini oluşturan önermelerin her değeri için **doğru** oluyorsa bu bileşik önermeye “**totoloji**”, daima **yanlış** oluyorsa bu bileşik önermeye de “**çelişki**” adı verilir.

Örneğin ; $p \vee p' \equiv 1$ bileşik önermesi totoloji, $p \wedge p' \equiv 0$ bileşik önermesi ise çelişkidir.

Soru: $p \vee (p' \vee q') \equiv ?$

Soru: $p \wedge (p \vee q)' \equiv ?$

(De Morgan kuralı uygulanır.)

Soru: $(p' \wedge q)' \vee q \equiv ?$

Soru: $[p \wedge (p \vee q)']' \equiv ?$

Örnek: $(p' \wedge q)' \wedge (p \vee q) \equiv ?$

(De Morgan kuralı uygulanır. Parantezlere bakıldığında dağılma özelliği tersine çevrilir.)

Soru: $(p \wedge q) \vee (p \vee q')' \equiv ?$

3) Ya da Bağlacı (\vee)

Yusuf karne hediyesi olarak babasından harçlık **ya da** bisiklet istemiştir. (İsteğinin alınması olayın gerçekleştiğini gösterir.)

Babası Yusuf 'a :

- Harçlık vermiş ve bisikleti almıştır. İsteği gerçekleşmez.
- Harçlık vermiş ama bisikleti almamıştır. İsteği gerçekleşir.
- Harçlık vermemiş ama bisikleti almıştır. İsteği gerçekleşir.
- Her ikisini de almamıştır. İsteği gerçekleşmez.

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*** Ya da (\vee) bağlacı ile oluşturulan bileşik önermenin doğruluk tablosu yandaki gibidir. (Ya da bağlacında sadece birinin sağlanması gerekir.)

Soru: **A)** $(1 \vee 0)' \vee (0' \vee 0) \equiv ?$

B) $[(0 \vee 1') \wedge (1 \vee 0)']' \equiv ?$

Soru: A) $p \vee q' \equiv 0$ ve $p' \vee r \equiv 1$ ise $(p \vee q) \wedge r' \equiv ?$

B) $p' \wedge q \equiv 1$ ve $q' \vee r \equiv 0$ ise $(p \vee r) \vee q \equiv ?$

Soru: A) $p \vee p \equiv ?$

B) $p \vee 1 \equiv ?$

C) $p \vee 0 \equiv ?$

D) $p \vee p' \equiv ?$

(İstenirse tablodan da işlemlerin sonucu bulunabilir.)

Not: Ya da bağlacında da değişme ve birleşme özelliği vardır.

Soru : Aşağıdaki önermelerde, boş bırakılan yerlere “ veya ” ile “ ya da ” bağlaçlarından uygun olanını yerleştiriniz. Sebebini açıklayınız.

A) 5 tek sayıdır . . . çift sayıdır.

B) 2 asal sayıdır . . . çift sayıdır.

C) 2^5 üslü sayıdır . . . sonucu iki basamaklıdır.

D) Ali, Temel Lise’de . . . Anadolu Lisesi’nde okuyacaktır.