

( Bu bölümde işlenecek olan konuların, matematik müfredat programındaki yeri altta gösterilmiştir. )

**9. 1. 1. 3. Koşullu önermeyi ve iki yönlü koşullu önermeyi açıklar.**

**A )**  $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$  olduğu doğruluk tablosu yardımıyla gösterilir.

**B )** “ Ve, veya, ya da, ise ” bağlaçları kullanılarak verilen en fazla iki önerme içeren ve en fazla dört bileşenli bileşik önermelere denk basit önermeler buldurulur.

**C )**  $p \Leftrightarrow q \equiv ( p \Rightarrow q ) \wedge ( q \Rightarrow p )$  olduğu doğruluk tablosu ile gösterilir.

**9. 1. 1. 4. Her (  $\forall$  ) ve bazı (  $\exists$  ) niceleyicilerini örneklerle açıklar.**

( Sözel olarak verilen ve niceleyici içeren açık önermeler, sembolik mantık diliyle; sembolik mantık diliyle verilen ve niceleyici içeren açık önermeler de sözel olarak ifade edilir. )

## 4) İse Bağlacı ( $\Rightarrow$ ) ( Koşullu Önerme )

$p$  ve  $q$  iki önerme olsun. Bu önermelerin **ise** bağlacı ile bağlanması sonucunda oluşan bileşik önermeye “**koşullu önerme**” adı verilir.

Babası Ali'ye, “ Tıp fakültesini kazanırsan sana araba alacağım. ” diyor.

$p$  : “ Ali tıp fakültesini kazandı. ”

$q$  : “ Babası arabayı aldı. ” önermelerini alalım.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Tıbbi kazanırsa babası arabayı alır.

Tıbbi kazanırsa babası arabayı almaz.

Tıbbi kazanmazsa da babası arabayı alabilir.

Tıbbi kazanmazsa babası arabayı almaz.

Not:  $p \Rightarrow q$  bileşik önermesinde;  $p$  doğru  $q$  yanlış iken sonuç yanlış, diğer durumlarda ise sonuç doğrudur.

Soru:  $\mathcal{A}$ )  $(1 \Rightarrow 0)' \Rightarrow (0 \vee 1') \equiv ?$

$\mathcal{B}$ )  $1 \Rightarrow [(0 \Rightarrow 0) \wedge (0 \underline{\vee} 0)'] \equiv ?$

**Soru:**  $p$  : “  $x < 0$  durumunda  $x^2 > 0$  olur.” ve  
 $q$  : “  $x^2 = 4$  için  $x = 2$  'dir.” önermeleri için  $q \Rightarrow p$  önerme-  
sinin doğruluk değerini bulunuz.

Örnek:

$p \Rightarrow q' \equiv 0$  ve  $r \wedge s \equiv 1$  ise  $(r' \vee q) \Rightarrow (p \vee s) \equiv ?$

Soru:  $p' \Rightarrow (q \vee r') \equiv 0$  ise  $(p \wedge q)' \Rightarrow r \equiv ?$

Soru:  $( p ' \Rightarrow q ) ' \wedge r ' \equiv 1$  ise  $[ p \wedge ( q ' \Rightarrow r ) ] ' \equiv ?$

Tanım:  $p \Rightarrow q$  önermesinin doğruluk değeri **1** ise bu koşullu önermeye “**gerektirme**” adı verilir.

Soru:  $p$  : “  $2^3 < 3^2$  ” ve  $q$  : “  $\frac{1}{5} > \frac{1}{3}$  ” önermeleri için

$p \Rightarrow q$  önermesinin bir gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz.



**Soru:**  $p$  : “  $(2/3)^{-2} = 9/4$  ” ve  $q$  : “  $\sqrt[3]{-27} = -3$  ” önermeleri için  $q' \Rightarrow p$  önermesinin bir gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz.

### *Koşullu Önermenin Karşıtı, Ters, Karşıt Ters*

$p \Rightarrow q$  bileşik önermesinin karşıtı  $q \Rightarrow p$  'dir.

$p \Rightarrow q$  bileşik önermesinin tersi  $p' \Rightarrow q'$  'dir.

$p \Rightarrow q$  bileşik önermesinin karşıt tersi  $q' \Rightarrow p'$  'dir.

**Örnek:** “ Bir üçgenin kenarları eş ise iç açıları da birbirine eşittir. ”

$p \Rightarrow q$  önermesinin karşıtı, tersi ve karşıt tersini bulunuz.

**Karşıtı :**

**Tersi :**

**Karşıt tersi :**

**Soru:** “  $x = 2$  ise  $3x + 1 = 7$  'dir. ” önermesinin karşıt tersini bulunuz.

## Koşullu Önermenin Özellikleri :

1)  $p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$  denkliği sağlanır. Aşağıdaki tablodan da denkliğin ispatı yapılabilir.

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$

\*\*\* 2)  $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$  denkliği sağlanır. Tablo çizerek de denkliğin ispatı yapılabilir.

### \*\*\* 3 ) Özel Durumlar

$\mathbf{p \Rightarrow 1 \equiv 1}$ <p style="text-align: center;">↓                      ↓</p> $\mathbf{1 \Rightarrow 1 \equiv 1}$ $\mathbf{0 \Rightarrow 1 \equiv 1}$	$\mathbf{p \Rightarrow 0 \equiv p'}$ <p style="text-align: center;">↓                      ↓</p> $\mathbf{1 \Rightarrow 0 \equiv 0}$ $\mathbf{0 \Rightarrow 0 \equiv 1}$	$\mathbf{1 \Rightarrow p \equiv p}$ <p style="text-align: center;">↓                      ↓</p> $\mathbf{1 \Rightarrow 1 \equiv 1}$ $\mathbf{1 \Rightarrow 0 \equiv 0}$
$\mathbf{0 \Rightarrow p \equiv 1}$ <p style="text-align: center;">↓                      ↓</p> $\mathbf{0 \Rightarrow 1 \equiv 1}$ $\mathbf{0 \Rightarrow 0 \equiv 1}$	$\mathbf{p \Rightarrow p \equiv 1}$ <p style="text-align: center;">↓                      ↓</p> $\mathbf{1 \Rightarrow 1 \equiv 1}$ $\mathbf{0 \Rightarrow 0 \equiv 1}$	$\mathbf{p \Rightarrow p' \equiv p'}$ <p style="text-align: center;">↓                      ↓</p> $\mathbf{1 \Rightarrow 0 \equiv 0}$ $\mathbf{0 \Rightarrow 1 \equiv 1}$

Örnek:  $p' \Rightarrow p$  önermesinin denkliğini siz bulunuz.

Örnek:  $(p \Rightarrow q) \vee p \equiv ?$

Soru:  $p \wedge (p \Rightarrow q')' \equiv ?$

Soru:  $[ (p \wedge q) \Rightarrow p ] \equiv ?$

Soru:  $[ ( p \Rightarrow q )' \wedge q ]' \equiv ?$

Soru:  $( q' \Rightarrow p )' \vee ( p \Rightarrow q )' \equiv ?$

## 5) Ancak Ve Ancak Bağlacı ( $\Leftrightarrow$ ) ( İki Yönlü Koşullu Önerme )

$p \Rightarrow q$  önermesi ile karşıtı olan  $q \Rightarrow p$  önermesinin “ve” bağlacı ile bağlanması sonucu oluşan bileşik önermeye “iki yönlü koşullu önerme” adı verilir.

$$p \Leftrightarrow q \equiv ( p \Rightarrow q ) \wedge ( q \Rightarrow p ) \text{ olarak alınır.}$$

Aşağıdaki tabloyu dolduralım.

$$p \Leftrightarrow q$$

↓

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$( p \Rightarrow q ) \wedge ( q \Rightarrow p )$



Not:  $p \Leftrightarrow q$  önermesinin sonucunda;  $p$  ile  $q$ 'nin değeri aynı olma durumunda sonuç 1, farklı olma durumunda ise sonuç 0 olarak alınır.

Soru:  $[ 1' \Leftrightarrow ( 0 \vee 1 ) ]' \vee ( 0 \Leftrightarrow 0 ) \equiv ?$

Soru:  $p \equiv 1$  ,  $q \equiv 0$  ve  $r \equiv 1$  ise

$( p \vee q )' \Leftrightarrow [ r' \Rightarrow ( p' \wedge q ) ] \equiv ?$

Soru:  $( p \Rightarrow q )' \wedge r' \equiv 1$  ise  $r \Leftrightarrow ( q' \wedge p ) \equiv ?$

Soru:

$[ q \Leftrightarrow ( p \wedge r ) ]' \Rightarrow q \equiv 0$  ise  $( p \vee r' ) \Leftrightarrow ( q \wedge p )' \equiv ?$

**Soru:**  $( p \vee q ) \Leftrightarrow q \equiv ( p \Rightarrow q )$  olduğunu gösteriniz.

( Ancak ve ancak bağlacınının açılımından elemanlar düzenlenerek istenene ulaşılır. Ama işlem uzun ve karışıktır. **Bunun yerine denkliği tablodan ispatlamak daha kolaydır. )**


**Tanım:**  $p \Leftrightarrow q$  iki yönlü koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu önermeye “çift gerektirme” adı verilir.

**Soru:**  $p$  : “Çift asal sayı yoktur.” ve  $q$  : “Negatif sayının çift kuvvetinin sonucu pozitif tam sayı olur.” önermeleri için  $q \Leftrightarrow p$  önermesinin çift gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz.

**Soru:**  $p \equiv 0$  ,  $q' \equiv 1$  ve  $r \equiv 1$  ise

$[ r \Leftrightarrow ( r' \Leftrightarrow p ) ] \Leftrightarrow ( p \Rightarrow q )$  önermesinin çift gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz.

**Soru:**  $( p \vee q ) \Leftrightarrow ( p' \wedge q' )$  önermesinin çift gerektirme olup olmadığını kontrol ediniz. ( Ancak ve ancak bağlacının açılımından veya tablodan sonucu bulmak da mümkündür. Ama iki parantez arasındaki bağı görebilirsenez çözümü bulmak daha kolaydır. )


## İki Yönlü Koşullu Önermenin Özellikleri :

1)  $p \Leftrightarrow q \equiv q' \Leftrightarrow p'$  denkliği sağlanır. İstenirse tablodan da denkleğin ispatı yapılabilir.

\*\*\*2)  $p \Leftrightarrow p \equiv 1$

$$p \Leftrightarrow p' \equiv 0$$

$$p' \Leftrightarrow p \equiv 0$$

$$p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$$

$$0 \Leftrightarrow p \equiv p'$$

$$p \Leftrightarrow 1 \equiv p$$

$$1 \Leftrightarrow p \equiv p$$

denklikleri  
sağlanır.



Soru:  $( p \Leftrightarrow p' ) \Leftrightarrow ( 1 \Leftrightarrow p ) \equiv ?$

Soru:  $[ ( 0 \Leftrightarrow p ) \wedge ( 1 \Leftrightarrow q ) ] \vee q \equiv ?$

## Açık Önermeler

Tanım : ( Açık Önerme ) İçerisinde en az bir değişken bulunan ve değişkenin durumuna göre doğru ya da yanlış hüküm bildiren ifadelere “ açık önerme ” adı verilir.

Açık önermeyi doğru yapan değerlerin kümesine “ doğruluk kümesi ” adı verilir.

Örnek : Aşağıdaki ifadelerden hangisi ya da hangileri açık önermedir ?

p : “ İstanbul Türkiye'nin yüz ölçümü olarak en büyük ilidir. ”

q : “  $x \in \mathbb{Z}$  ,  $3x - 6 = 11$  ”

r : “ Bugün hava yağışlı olacakmış. ”

s : “ x ve y doğal sayı olmak üzere  $x = 3y$  'dir. ”

**Örnek:**  $p(x) : "x \in \mathbb{Z}, x^2 \leq 4"$  açık önermesini doğru yapan  $x$  değerlerini bulunuz.

**Soru:**  $s : "x$  ve  $y$  doğal sayı olmak üzere  $x = 3y$  'dir. " açık önermesini doğru yapan  $x$  ve  $y$  değerlerini bulunuz.

Soru:  $p : " x \in \mathbb{Z} , x^2 - 5x - 24 = 0 "$  açık önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

### Niceleyiciler

Önüne geldiği elemanların çokluğunu belirten “ bazı ( en az bir ) ve her ” ifadelerine “ niceleyiciler ” adı verilir.

Her sözcüğü ile bütün, tüm, tamamı sözcükleri aynı anlama gelir.

Her kelimesi yerine  $\forall$  sembolü kullanılır.

Bazı sözcüğü en az bir anlamındadır. En az bir yerine  $\exists$  sembolü kullanılır.

**Örnek:**  $p$  : “ Bazı reel sayılar sıfırdan büyük veya sıfıra eşittir. ”  
sözlü olarak verilen önermeyi sembolik mantık diliyle yazıp önermenin doğruluk değerini bulalım.

$p$  : “  $\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 0$  ” olarak yazılır.

Örneğin,  $5 \in \mathbb{R}$  olup  $5 \geq 0$  'dır. Dolayısıyla  $p \equiv 1$  'dir.

**Soru:**  $p$  : “ Her  $x$  doğal sayısı 0 'dan büyüktür. ” ve  
 $q$  : “ En az bir tam sayının karesi 4 'tür. ” sözlü olarak verilen önermeleri sembolik mantık diliyle yazıp, önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

**Soru:**  $p : “ \exists x \in \mathbb{R} , x^2 + 1 = 0 ”$  ve  $q : “ \forall x \in \mathbb{Z} , x^2 \geq 0 ”$   
sembolik mantık diliyle verilen önermeleri sözlü olarak yazıp,  
önermelerin doğruluk değerlerini bulunuz.

## Her ve Bazı Niceleyicilerinin Deęili :

$p$  bir açık önerme ise  $p$ 'nin deęili  $\neg p$  ile gösterilir.

Aşağıdaki tabloda bazı sembollerin değili verilmiştir.

<b>Sembol</b>	=	$\equiv$	$\lt$	$\gt$	$\leq$	$\geq$	$\exists$	$\forall$	$\wedge$	$\vee$
<b>Deęili</b>	$\neq$	$\not\equiv$	$\geq$	$\leq$	$\lt$	$\gt$	$\forall$	$\exists$	$\vee$	$\wedge$

Örnek:  $p$  : “  $\exists x \in \mathbb{R}, 3x - 6 = 0$  ” önermesinin deęilini bulunuz.

**Soru:**  $p : “ \forall x \in \mathbb{N} , x^2 \leq 1 ”$  önermesinin deęilini ve deęilinin doğruluk değerini bulunuz.



**Soru:**  $p : “ \forall x \in \mathbb{Z} , 2x = 4 ” \wedge “ \exists x \in \mathbb{N} , \frac{4}{x} > 1 ”$  önermesinin deęilini ve deęilinin doğruluk değerini bulunuz.

**Soru:**  $p : “ \exists x \in \mathbb{Z} , x^2 < 0 ” \vee “ \forall x \in \mathbb{R} , x^2 > x^3 ”$  önermesinin deęilini ve deęilinin doğruluk değerini bulunuz.

Soru:  $p : “ \exists x \in \mathbb{R} , x + 3 = 5 ” \Rightarrow “ \exists x \in \mathbb{N} , \sqrt{x} = 25 ”$

önermesinin deęilini ve deęilinin doğruluk değerini bulunuz.

(  $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$  idi. )

**Soru:**  $p : “ \exists x \in \mathbb{Z} , x^2 - 4 = 0 ” \Rightarrow “ \text{Eşkenar dörtgenin tüm kenarları birbirine eşittir. } ”$  önermesinin karşıt tersini bulup, karşıt tersinin doğruluk değerini bulunuz.